

Aufgabe 1.1) ganz-rationale Funktion

1.1.a) Bestimmen Sie eine ganz-rationale Funktion 3. Grades, deren Graph bei $x=4$ die x -Achse berührt und an deren Punkt $(2/f(2))$ die Tangente mit der Gleichung $4x+y-16=0$ anliegt!

Lösung: $f(x) = x^3 - 8x^2 + 16x$

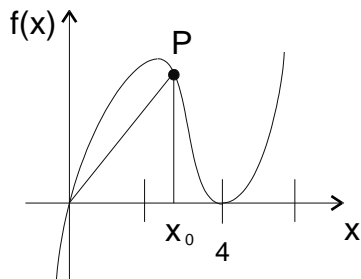
1.1.b) Diskutieren Sie die Funktion nach folgenden Kriterien:

- 1.) Definitionsbereich
- 2.) Nullstellen
- 3.) Extremwerte
- 4.) Wendepunkte
- 5.) Randverhalten
- 6.) Skizze

1.1.c) Berechnen Sie die von dem Graphen von $f(x)$ und der x -Achse eingeschlossene Fläche!

1.1.d) In die von dem Graphen von $f(x)$ und der x -Achse eingeschlossenen Fläche soll ein möglichst großes Dreieck einbeschrieben werden. Die untere Seite des Dreiecks liegt auf der x -Achse vom Ursprung bis zur Stelle x_0 , die rechte Seite ist eine Senkrechte zur x -Achse von x_0 bis zum Punkt P auf dem Graphen, die linke Seite verbindet den Ursprung mit dem Punkt P . Bestimmen Sie x_0 !

Skizze:



1.1.e) Laut Aufgabe 1.1.a) liegt in Punkt $(2/f(2))$ die Tangente mit der Gleichung $4x+y-16=0$ an. In welchem Punkt des Graphen liegt eine weitere Tangente an, die zur ersten parallel ist?

Aufgabe 1.2) Exponentialfunktion

1.2.a) Diskutieren Sie die Funktion $f(x) = -x + e^x$ nach folgenden Kriterien:

- 1.) Definitionsbereich
- 2.) Nullstellen
- 3.) Extremwerte
- 4.) Wendepunkte
- 5.) Randverhalten
- 6.) Skizze

1.2.b) Gegeben ist die Kurvenschar $f_k(x) = x^k + e^x$. Für welche $k \in \mathbb{N}$ ist der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_k(x) = \infty, \text{ für welche ist der Grenzwert } \lim_{x \rightarrow -\infty} f_k(x) = -\infty?$$

Aufgabe 1.3) gebrochen-rationale Funktion

1.3.a) Diskutieren Sie die Funktion $f(x) = \frac{x}{x-1}$ nach folgenden Kriterien:

- 1.) Definitionsbereich
- 2.) Nullstellen
- 3.) Verhalten an den Unstetigkeitsstellen
- 4.) Extremwerte
- 5.) Wendepunkte
- 6.) Randverhalten
- 7.) Skizze

Aufgabe 1.4) Vektorrechnung

1.4.a) Gesucht ist eine Parameterform der Ebene E , in der die Punkte $A(2/1/2)$, $B(0/1/4)$ und $C(4/0/2)$ liegen.

Mögliche Lösung: $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- 1.4.b) Liegt der Punkt $D(12/-2/-2)$ ebenfalls in der Ebene?
- 1.4.c) Berechnen Sie die Spurgrade von E in der x - y -Ebene!
- 1.4.d) In welchem Winkel geht die Ursprungsgerade, die die Ebene im Punkt $A(2/1/2)$ schneidet, durch die Ebene E ?
- 1.4.e) Geben Sie die zur Ebene E parallele Ebene E_2 an, in der der Ursprung liegt!
- 1.4.f) Bestimmen Sie den Abstand der Ebene E vom Ursprung!

Aufgabe 1.5) Wahrscheinlichkeitsrechnung

- 1.5.a) Eine Urne enthält 3 weiße und 7 schwarze Kugeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei 10maligem Ziehen mit Zurücklegen
 - 1.) höchstens 3 weiße Kugeln
 - 2.) genau drei weiße Kugeln
 - 3.) mindestens drei weiße Kugeln
 - 4.) mehr als drei weiße Kugeln zu ziehen?
- 1.5.b) Wieviel weiße Kugeln erwartet man bei dem Experiment aus Aufgabe 1.5.a)?
- 1.5.c) Bei einem Spiel werden aus der Urne aus Aufgabe 1.5.a) zwei Kugeln ohne Zurücklegen entnommen. Wird keine weiße Kugel gezogen, ist der Gewinn 1,00 €, bei einer weißen Kugel 2,00 € und bei zwei weißen Kugeln 3,00 €. Wie hoch muß der Einsatz des Spielers sein, damit das Spiel fair ist?
- 1.5.d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden beim 3maligen Ziehen ohne Zurücklegen 3 gleichfarbige Kugeln aus der Urne aus Aufgabe 1.5.a) herausgenommen?

Abitur - Übung 2

Aufgabe 2.1) ganz-rationale Funktion

- 2.1.a) Gesucht ist eine ganz-rationale Funktion 3. Grades, deren Graph die Gerade $g(x)=x+1$ bei $x=-1$ schneidet und im Wendepunkt $WP(1/f(1))$ die Tangente $t(x)=-3x+5$ hat.
Lösung: $f(x)=x^3-3x^2+4$
- 2.1.b) Diskutieren Sie die Funktion nach folgenden Kriterien:
1.) Definitionsbereich
2.) Nullstellen
3.) Extremwerte
4.) Wendepunkte
5.) Randverhalten
6.) Skizze
- 2.1.c) Berechnen Sie die von dem Graphen von $f(x)$ und der x -Achse eingeschlossene Fläche!
- 2.1.d) Die Graphen von $f(x)$ und $g(x)$ schließen zwei Flächen ein. Weisen Sie nach, daß die beiden Flächen gleich groß sind!
- 2.1.e) In das Dreieck, welches die Wendetangente mit den Koordinatenachsen bildet, soll ein möglichst großes Rechteck einbeschrieben werden. Für welchen x -Wert geschieht das?

Aufgabe 2.2) Exponentialfunktion

- 2.2.a) Diskutieren Sie die Funktion $f(x) = x^2 \cdot e^x$ nach folgenden Kriterien:
1.) Definitionsbereich
2.) Nullstellen
3.) Extremwerte
4.) Wendepunkte
5.) Randverhalten
6.) Skizze
- 2.2.b) Zeigen Sie, daß die Funktion $F(x) = e^x \cdot (x^2 - 2x + 2)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist!
- 2.2.c) Berechnen Sie die Fläche, die von der Funktion $f(x)$, den Koordinatenachsen und dem Graphen der Relation $x=2$ eingeschlossen wird!
- 2.2.d) Bestimmen Sie die Wendetangenten $t_1(x)$ und $t_2(x)$!

Aufgabe 2.3) gebrochen-rationale Funktion

- 2.3.a) Diskutieren Sie die Funktion $f(x) = \frac{8x}{x^2+3}$ nach folgenden Kriterien:
- | | | |
|---|-------------------|-----------------|
| 1.) Definitionsbereich | 2.) Symmetrie | 3.) Nullstellen |
| 4.) Verhalten an den Unstetigkeitsstellen | | 5.) Extremwerte |
| 6.) Wendepunkte | 7.) Randverhalten | 8.) Skizze |

Aufgabe 2.4) Vektorrechnung

2.4.a) Gesucht ist die Gerade g_1 durch die Punkte $P(2/3/4)$ und $Q(3/3/5)$.

$$\text{Mögliche Lösung: } g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.4.b) Bestimmen Sie den Spurpunkt SP der Geraden g_1 mit der x - y -Ebene!

2.4.c) Gibt es einen Spurpunkt SP_2 der Geraden g_1 mit der x - z -Ebene?

2.4.d) Gegeben sind die Punkte $A(4/-2/5)$, $B(1/0/7)$ und $C(4/0/1)$. Wie lautet die Ebene E_1 , in der die Punkte A, B und C liegen?

$$\text{Mögliche Lösung: } E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.4.e) Zeigen Sie, daß Punkt $R(1/2/3)$ in der Ebene liegt!

2.4.f) Die Punkte A, B und C geben drei Ecken eines Parallelogramms an. Bestimmen Sie den Punkt D, der die vierte Ecke bildet!

2.4.g) Wie lautet die Spurgerade SG in der x - z -Ebene der Ebene E_1 ?

2.4.h) Welchen Abstand hat die Ebene E_1 vom Punkt $S(3/4/4)$?

2.4.i) Bestimmen Sie die Lage von Ebene E_1 zur Geraden g_1 . Falls ein Durchdringungspunkt existiert, geben Sie diesen und zusätzlich den Schnittwinkel an!

2.4.k) Wie lautet eine Parameterform einer Geraden g_2 , die E_1 rechtwinklig im Punkt $T(4/1/-1)$ schneidet?

Aufgabe 2.5) Wahrscheinlichkeitsrechnung

2.5.a) Bei einem Spiel wird zweimal gewürfelt und die Augensumme berechnet. Ist die Augensumme höchstens 6, zahlt Doof an Dick 1,00 €, ist die Augensumme mindestens 7, zahlt Dick an Doof 1,00 €. Ist das Spiel fair?

2.5.b) Es wird einmal ein idealer Würfel geworfen. Berechnen Sie $E(X)$ und $V(X)$!

2.5.c) Wie oft muß man würfeln, um mit mindestens 99%iger Sicherheit eine „6“ zu bekommen?

2.5.d) Wie hoch sind beim dreimaligen Würfeln die Wahrscheinlichkeiten für:

- 1) 3 gleiche Zahlen
- 2) 3 ungleiche Zahlen
- 3) mindestens 2mal die „6“

2.5.e) Bei einem Spiel wird einmal gewürfelt. Der Einsatz beträgt 3,00 €, der Gewinn ist gleich der Augenzahl des Würfels. Ist das Spiel fair?

2.5.f) Bei einem Experiment wird 100mal gewürfelt. k ist die Anzahl der „6“. Wie lautet der Erwartungswert von k ? Mit welchen Werten für k ist bei einer Toleranz von 2σ zu rechnen?

Abitur - Übung 3

Aufgabe 3.1) ganz-rationale Funktion

- 3.1.a) Die Parabel einer Funktion 3. Grades geht durch den Ursprung. Ihre Wendetangente bei $x=2$ lautet $g(x) = -2x+8$. Bestimmen Sie die Funktion!
Lösung: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 10x$
- 3.1.b) Diskutieren Sie die Funktion nach folgenden Kriterien:
1.) Definitionsbereich
2.) Schnittpunkt mit der $f(x)$ -Achse
3.) Nullstellen
4.) Symmetrie
5.) Extremwerte
6.) Wendepunkte
7.) Randverhalten
8.) Skizze
- 3.1.c) Berechnen Sie die von dem Graphen von $f(x)$ und der Parabel $p(x) = -6x^2 + 19x$ eingeschlossenen Fläche!
- 3.1.d) $h(x)$ sei die Gerade, die durch die Extrempunkte verläuft. Berechnen Sie die Fläche, die von der Geraden $h(x)$ und den Koordinatenachsen eingeschlossen wird!
- 3.1.e) Bestimmen Sie den kleinsten Abstand vom Ursprung zur Parabel $y=4-x^2$! Prüfen Sie mögliche Ergebnisse mit dem Vorzeichenwechselkriterium, statt mit der 2. Ableitung.

Aufgabe 3.2) Exponentialfunktion

- 3.2.a) Diskutieren Sie die Funktion $f(x) = \frac{1}{x} \cdot e^x$ nach folgenden Kriterien:
1.) Definitionsbereich
2.) Nullstellen
3.) Extremwerte
4.) Wendepunkte
5.) Randverhalten
6.) Verhalten an der Unstetigkeitsstelle
7.) Skizze
- 3.2.b) Beschreiben Sie mit einem Stichwort, wie sich die Kurve $g(x) = -\frac{1}{x} \cdot e^x$ von dem Graphen aus Aufgabe 3.2.a) unterscheidet?
- 3.2.c) Beschreiben Sie mit einem Stichwort, wie sich die Kurve $h(x) = \frac{1}{x} \cdot e^x - 1$ von dem Graphen aus Aufgabe 3.2.a) unterscheidet?
- 3.2.d) Bestimmen Sie die Fläche unter der Kurve der Hyperbelfunktion $k(x) = \frac{1}{x}$ im Intervall $[1; \infty]$

Aufgabe 3.3) gebrochen-rationale Funktion

3.3.a) Diskutieren Sie die Funktion $f(x) = \frac{x+2}{x^2-4}$ nach folgenden Kriterien:

- 1.) Definitionsbereich
- 2.) Nullstellen
- 3.) Verhalten an den Unstetigkeitsstellen
- 4.) Extremwerte
- 5.) Wendepunkte
- 6.) Randverhalten
- 7.) Skizze

3.3.b) Geben Sie eine gebrochen-rationale Funktion an, die bei $x=1$ eine Nullstelle und bei $x=-2$ eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel hat!

Aufgabe 3.4) Vektorrechnung

3.4.a) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ t^2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} t \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$. Für welches t sind die Vektoren linear abhängig?

3.4.b) Bilden Sie für $t=1$: $\vec{c} = 4 \cdot \vec{a} - \vec{b}$

3.4.c) Geben Sie die Ebene E in Parameter-, Normalen- und Koordinatenform an, für die \vec{a} der Verschiebungsvektor und \vec{b} und \vec{c} die Richtungsvektoren sind ($t=1$)!

$$\text{Mögliche Lösung: } E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

3.4.d) Für $t=3$ ergeben sich die Vektoren \vec{a} und \vec{b} , die auf eine Gerade g zeigen. Bestimmen Sie die Gerade!

$$\text{Mögliche Lösung: } g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3.4.e) Untersuchen Sie die Lage zwischen Gerade g und Ebene E !

3.4.f) Wie lautet die Gerade g_2 durch den Punkt $P(-2/1/3)$, die parallel zur Geraden g verläuft?

3.4.g) Bestimmen Sie den Abstand der Ebene E vom Ursprung!

Aufgabe 3.5) Wahrscheinlichkeitsrechnung

3.5.a) Ein Zeitungsverkäufer kauft 100 Tageszeitungen. Jede Zeitung kostet im Einkauf 0,70 € und im Verkauf 1,00 €. Vom Verlag können nur Pakete von 20 Stück bezogen werden. In 20% der Tage verkauft er 40 Zeitungen, in 35% 60 Zeitungen, in 40% 80 Zeitungen und ansonsten verkauft er alle Zeitungen. Jede nicht verkaufte Zeitung wird abends für 0,50 € an Restaurants verkauft.

Wieviel Zeitungen sollte er für einen maximalen Gewinn kaufen? Berechnen Sie dazu die Erwartungswerte der verschiedenen Möglichkeiten!

Abitur - Übung 4

Aufgabe 4.1) ganz-rationale Kurvenschar

- 4.1.a) Gegeben ist die Kurvenschar $f_a(x) = x^3 - ax$. Diskutieren Sie die Funktion nach folgenden Kriterien:
- 1.) Definitionsbereich
 - 2.) Nullstellen
 - 3.) Symmetrie
 - 4.) Extremwerte
 - 5.) Wendepunkte
 - 6.) Randverhalten
 - 7.) Skizze für $a=3$
- 4.1.b) Für welche a hat die Funktion eine oder drei Nullstellen? Kann die Funktion mehr als drei Nullstellen haben?
- 4.1.c) Zeigen Sie, daß der Wendepunkt unabhängig von a immer im Ursprung liegt!
- 4.1.d) Zeigen Sie, daß im Falle $a > 0$ die Gerade, die die Extremwerte eines Graphen miteinander verbindet, unabhängig von a immer eine Ursprungsgerade ist!
- 4.1.e) Berechnen Sie für $a=4$ die von dem Graphen von $f(x)$ und der x -Achse eingeschlossenen Fläche! (Symmetrie beachten!)
- 4.1.f) Für welches a geht der Graph durch den Punkt $P(2/12)$?
- 4.1.g) Für welches a hat der Graph bei $x = \pm 3$ Nullstellen?
- 4.1.h) Für welches a hat der Graph bei $x=1$ die Steigung $m=-1$?

Aufgabe 4.2) Exponentialfunktion

- 4.2.a) Diskutieren Sie die Funktion $f(x) = 1 - e^{1-x}$ nach folgenden Kriterien:
- 1.) Definitionsbereich
 - 2.) Nullstellen
 - 3.) Extremwerte
 - 4.) Wendepunkte
 - 5.) Randverhalten
 - 6.) Skizze

Aufgabe 4.3) gebrochen-rationale Funktion

4.3.a) Diskutieren Sie die Funktion $f_a(x) = \frac{x+1}{x-a}$ mit $a > 0$ nach folgenden Kriterien:

- 1.) Definitionsbereich
- 2.) Nullstellen
- 3.) Verhalten an den Unstetigkeitsstellen
- 4.) Extremwerte
- 5.) Wendepunkte
- 6.) Randverhalten
- 7.) Skizze für $a=2$

4.3.b) Wie muß die Funktion verändert werden, damit bei $\pm a$ Polstellen existieren?

Aufgabe 4.4) Vektorrechnung

4.4.a) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 3k \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} k \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$. Für welches k sind die

Vektoren linear abhängig?

4.4.b) Die Vektoren \vec{a} und \vec{b} sollen eine Ebene E_1 aufspannen. Wählen Sie $k=3$. Der Punkt $D(1/-2/-2)$ liegt in der Ebene. Wie lautet die Gleichung der Ebene E_1 ?

4.4.c) Bilden Sie eine Gerade g_1 , die die Ebene E_1 rechtwinklig in D schneidet!

4.4.d) Mit $k=2$ ergeben sich 2 neue Vektoren \vec{a} und \vec{b} . Bilden Sie daraus mit \vec{c} als Verschiebungsvektor eine zweite Ebene E_2 !

4.4.e) Wie lautet die Schnittgerade g_2 von E_1 und E_2 ?

4.4.f) Wie lautet der Schnittwinkel φ von E_1 und E_2 ?

Aufgabe 4.5) Wahrscheinlichkeitsrechnung

4.5.a) Ein Autokennzeichen hat hinter der Ortskennung (z.B. „W“ für Wuppertal) mindestens 1 und höchstens 2 Buchstaben und mindestens 1 und höchstens 3 Ziffern. Wir gehen von 26 möglichen Buchstaben und 10 möglichen Ziffern mit einem Bereich von 1 bis 999 aus. Wieviel Autos können unterschieden werden?

4.5.b) In einem Experiment wird ein idealer Würfel 100-mal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die relative Häufigkeit h für die Augenzahl „6“ um weniger als 20% als die Wahrscheinlichkeit für die Augenzahl „6“ abweicht, wenn das Experiment sehr oft wiederholt wird?

4.5.c) Eine Partei möchte wissen, mit welchem Prozentsatz sie bei der nächsten Wahl rechnen kann. Wie viele Personen müssen befragt werden, damit zu 90%iger Sicherheit der tatsächliche Prozentsatz um höchstens 20% vom in der Umfrage ermittelten Prozentsatz abweicht?