

Lösung der Abitur-Übung 1:

Aufgabe 1.1.a)

Funktion allgemein: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Ableitungen allgemein: $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

bei $x=4$ die x -Achse $f(4)=0$ $0=64a+16b+4c+d$

bei $x=2$ ist $y=-4x+16$ $f(2)=8$ $8=8a+4b+2c+d$

berührt bei $x=4$ $f'(4)=0$ $0=48a+8b+c$

bei $x=2$ ist $m=-4$ $f'(2)=-4$ $-4=12a+4b+c$

Gleichungssystem:

$$\text{I) } 0 = 64a + 16b + 4c + d$$

$$\text{II) } 8 = 8a + 4b + 2c + d$$

$$\text{III) } 0 = 48a + 8b + c$$

$$\text{IV) } -4 = 12a + 4b + c$$

$$\text{I) } 0 = 64a + 16b + 4c + d$$

$$\text{I-II=II) } -8 = 56a + 12b + 2c$$

$$\text{III) } 0 = 48a + 8b + c$$

$$\text{IV) } -4 = 12a + 4b + c$$

$$\text{I) } 0 = 64a + 16b + 4c + d$$

$$\text{II) } -8 = 56a + 12b + 2c$$

$$\text{III-IV=III) } 4 = 36a + 4b$$

$$\text{IV) } -4 = 12a + 4b + c$$

$$\text{I) } 0 = 64a + 16b + 4c + d$$

$$\text{II) } -8 = 56a + 12b + 2c$$

$$\text{III) } 4 = 36a + 4b$$

$$\text{II-2}\cdot\text{IV=IV) } 0 = 32a + 4b$$

$$\text{I) } 0 = 64a + 16b + 4c + d$$

$$\text{II) } -8 = 56a + 12b + 2c$$

$$\text{III) } 4 = 36a + 4b$$

$$\text{III-IV=IV) } 4 = 4a \quad \underline{a=1}$$

$$a \text{ in III) } 4 = 36 + 4b \quad \underline{b=-8}$$

$$a, b \text{ in II) } -8 = 56 - 96 + 2c \quad \underline{c=16}$$

$$a, b, c \text{ in I) } 0 = 64 - 128 + 64 + d \quad \underline{d=0}$$

Ergebnis: $f(x) = x^3 - 8x^2 + 16x$

Aufgabe 1.1.b)

1.) Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

2.) Nullstellen, Bedingung: $f(x) = 0$

$$0 = x^3 - 8x^2 + 16x = x(x^2 - 8x + 16)$$

$$x_1 = 0 \quad \vee \quad x^2 - 8x + 16 = 0$$

$$x_{2,3} = 4 \pm \sqrt{0}$$

$$x_{2,3} = 4$$

N_1 (0/0)

$N_{2,3}$ (4/0)

3.) Extremwerte (Maximum, Minimum)

a) notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 3x^2 - 16x + 16$$

$$0 = 3x^2 - 16x + 16 \quad | :3$$

$$0 = x^2 - \frac{16}{3}x + \frac{16}{3} \quad | \text{ mit pq-Formel lösen}$$

$$x_{1,2} = \frac{8}{3} \pm \sqrt{\frac{64}{9} - \frac{48}{9}}$$

$$x_{1,2} = \frac{8}{3} \pm \sqrt{\frac{16}{9}} \quad x_1 = \frac{4}{3} \quad \text{und} \quad x_2 = 4$$

b) hinreichende Bedingung: $f''(x_{1,2}) \neq 0$

$$f''(x) = 6x - 16$$

$$f''\left(\frac{4}{3}\right) = 6 \cdot \left(\frac{4}{3}\right) - 16 = -\frac{24}{3} < 0 \quad \text{dh. Maximum bei } x = \frac{4}{3}$$

$$f''(4) = 6 \cdot 4 - 16 = 8 > 0 \quad \text{dh. Minimum bei } x = 4$$

c) y-Koordinaten:

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^3 - 8 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 + 16 \cdot \frac{4}{3} = \frac{256}{27}$$

$$f(4) = 4^3 - 8 \cdot 4^2 + 16 \cdot 4 = 0$$

$$\text{Maximum} \left(\frac{4}{3} / \frac{256}{27}\right)$$

$$\text{Minimum} (4/0)$$

4.) Wendepunkt

a) notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

$$f''(x) = 6x - 16$$

$$0 = 6x - 16 \quad | +16 \quad | :6$$

$$x_1 = \frac{8}{3}$$

b) hinreichende Bedingung: $f'''(x) \neq 0$

$$f'''(x) = 6$$

$$f'''(x) = 6 > 0 \quad \text{dh. Wendepunkt bei } x = \frac{8}{3} \text{ mit einer rechts-links Krümmung}$$

c) y-Koordinate: $f\left(\frac{8}{3}\right) = \left(\frac{8}{3}\right)^3 - 8 \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^2 + 16 \cdot \frac{8}{3} = \frac{128}{27}$

$$\text{Ergebnis: WP} \left(\frac{8}{3} / \frac{128}{27}\right)$$

5.) Randverhalten

a) Verhalten des Graphen für $x \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[x^3 \left(\frac{x^3}{x^3} - \frac{8x^2}{x^3} + \frac{16x}{x^3} \right) \right] \quad | \text{ höchste Potenz ausklammern}$$

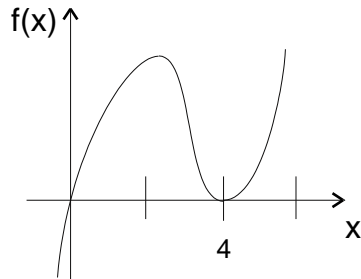
$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x^3 \left(1 - \frac{8}{x} + \frac{16}{x^2} \right) \right] = \infty \cdot (1 - 0 + 0) = \infty$$

b) Verhalten des Graphen für $x \rightarrow -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x^3 \left(\frac{x^3}{x^3} - \frac{8x^2}{x^3} + \frac{16x}{x^3} \right) \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x^3 \left(1 - \frac{8}{x} + \frac{16}{x^2} \right) \right] = -\infty \cdot (1 - 0 + 0) = -\infty$$

6.) Skizze:



Aufgabe 1.1.c)

$$A = \left| \int_0^4 (x^3 - 8x^2 + 16x) dx \right| = \left| \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{8}{3}x^3 + 8x^2 \right]_0^4 \right|$$

$$= \left| \left[\frac{1}{4}4^4 - \frac{8}{3}4^3 + 8 \cdot 4^2 \right] - [0] \right| = \left| \frac{64}{3} \right| = \frac{64}{3} FE$$

Aufgabe 1.1.d)

HB: $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$

NB: mit $g=x$ und $h=y$ gilt $y = x^3 - 8x^2 + 16x$

Fkt: $f(x) = \frac{1}{2}x(x^3 - 8x^2 + 16x) = \frac{1}{2}x^4 - 4x^3 + 8x^2$ $ID = \mathbb{R} / \{0 \leq x \leq 4\}$

Extremwert:

a) notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 2x^3 - 12x^2 + 16x$$

$$0 = 2x^3 - 12x^2 + 16x$$

$$0 = x(2x^2 - 12x + 16)$$

$$x_1 = 0 \quad \vee \quad 2x^2 - 12x + 16 = 0 \quad | :2$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$x_{2,3} = 3 \pm \sqrt{9-8}$$

$$x_2 = 4 \quad x_3 = 2$$

für $x_1=0$ und $x_2=4$ ist keine Fläche vorhanden

b) hinreichende Bedingung: $f''(2) \neq 0$

$$f''(x) = 6x^2 - 24x + 16$$

$$f''(2) = 24 - 48 + 16 = -8 < 0 \quad \text{d.h. Maximum für } x=2$$

Ergebnis: $x_0=2$

Aufgabe 1.1.e)

gesucht ist ein weiterer Punkt mit der Steigung $m = -4$

d.h. die 1. Ableitung muß $= -4$ gesetzt werden

$$-4 = 3x^2 - 16x + 16 \quad | +4$$

$$0 = 3x^2 - 16x + 20 \quad | :3$$

$$0 = x^2 - \frac{16}{3}x + \frac{20}{3} \quad | \text{mit pq-Formel oder quadratischer Ergänzung lösen}$$

$$x_1 = \frac{10}{3} \quad x_2 = 2 \quad | \text{gesuchter Wert ist } x_1$$

y-Koordinate:

$$f\left(\frac{10}{3}\right) = \left(\frac{10}{3}\right)^3 - 8 \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^2 + 16 \cdot \left(\frac{10}{3}\right) = \frac{40}{27}$$

$$\text{Ergebnis: } P\left(\frac{10}{3} / \frac{40}{27}\right)$$

Aufgabe 1.2.a)

1.) Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

2.) Nullstellen, Bedingung: $f(x) = 0$

$$0 = -x + e^x$$

$x = e^x$ | hat keine Lösung; es gibt keinen Schnittpunkt der beiden Graphen

$$\mathbb{L} = \{ \}$$

3.) Extremwerte (Maximum, Minimum)

a) notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$f'(x) = -1 + e^x$$

$$0 = -1 + e^x \quad | +1$$

$$e^x = 1 \quad | \ln$$

$$x = \ln 1$$

$$x = 0$$

b) hinreichende Bedingung: $f''(0) \neq 0$

$$f''(x) = e^x$$

$$f''(0) = e^0 = 1 > 0 \text{ d.h. Minimum}$$

c) y-Koordinaten: $f(0) = -0 + e^0 = 1$

Ergebnis: Minimum (0/1)

4.) Wendepunkt

a) notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

$$f''(x) = e^x$$

$$0 = e^x \quad | e^x \text{ hat keine Nullstelle}$$

$$\mathbb{L} = \{ \}$$

5.) Randverhalten

a) Verhalten des Graphen für $x \rightarrow +\infty$

$f(x) = -x + e^x$ im positiven Bereich läuft $-x$ gegen $-\infty$, e^x gegen $+\infty$, da Exponentialfunktionen schneller wachsen, gilt

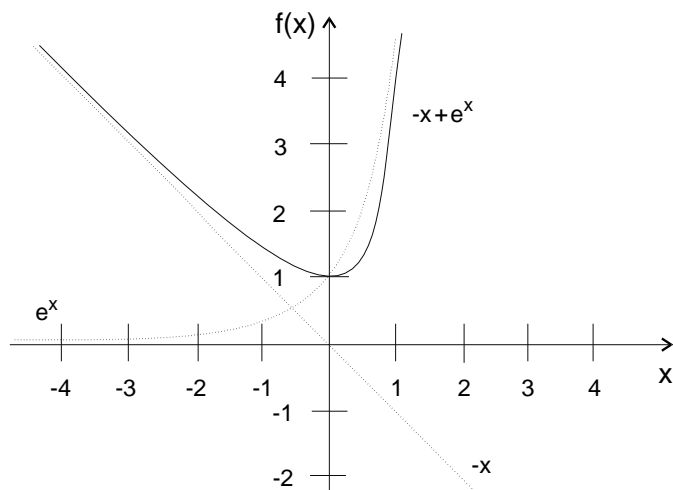
$$\lim_{x \rightarrow \infty} [-x + e^x] = +\infty$$

b) Verhalten des Graphen für $x \rightarrow -\infty$

$f(x) = -x + e^x$ im negativen Bereich läuft $-x$ gegen $+\infty$, e^x gegen 0,
für die Summe gilt

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [-x + e^x] = +\infty$$

6.) Skizze:



Aufgabe 1.2.b)

Die Funktion e^x läuft für $x \rightarrow -\infty$ gegen Null.

Ist k ungerade, d.h. $k \in \{1; 3; 5 \dots\}$, so ist x^k für $x \rightarrow -\infty$ negativ.

Damit ist die Summe $x^k + e^x$ auch negativ, der Grenzwert ist $-\infty$.

Ist k gerade, d.h. $k \in \{2; 4; 6 \dots\}$, so ist x^k für $x \rightarrow -\infty$ positiv.

Damit ist die Summe $x^k + e^x$ auch positiv, der Grenzwert ist ∞ .

Aufgabe 1.3.a)

1.) Definitionsbereich $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Die Nullstellen des Nenners dürfen nicht für x eingesetzt werden.

2.) Nullstellen $f(x) = 0$

$$0 = \frac{x}{x-1} \quad | \cdot \text{Nenner}$$

$$0 = x$$

$$N(0/0)$$

3.) Verhalten an der Unstetigkeitsstelle

a) linksseitiger Grenzwert ($x = 1 - h$)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1-h}{1-h-1} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1-h}{-h} \right) = -\infty$$

b) rechtsseitiger Grenzwert ($x = -2 + h$)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1+h}{1+h-1} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1+h}{h} \right) = \infty$$

4.) Extremwerte (Maximum, Minimum)

a) notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x-1) - x \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

Da der Zähler nicht Null werden kann, hat die 1. Ableitung keine Nullstellen, der Graph keine Extremwerte.

5.) Wendepunkte

a) notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

$$f''(x) = \frac{0 \cdot (x-1)^2 - (-1) \cdot 2(x-1) \cdot 1}{(x-1)^4} = \frac{2}{(x-1)^3}$$

Da der Zähler nicht Null werden kann, hat die 2. Ableitung keine Nullstellen, der Graph keine Wendepunkte.

6.) Randverhalten

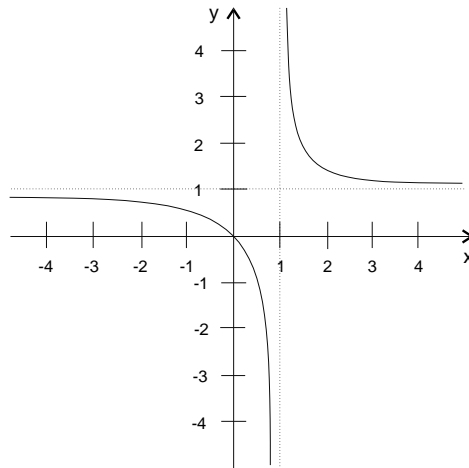
a) Verhalten des Graphen für $x \rightarrow \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{x}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{x}} \right) = \frac{1}{1-0} = 1$$

b) Verhalten des Graphen für $x \rightarrow -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\frac{x}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{x}} \right) = \frac{1}{1+0} = 1$$

7.) Skizze



Aufgabe 1.4.a)

Verschiebungsvektor: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

1. Richtungsvektor: $\vec{r}_1 = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 0-2 \\ 1-1 \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

2. Richtungsvektor: $\vec{r}_2 = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 4-2 \\ 0-1 \\ 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ebenengleichung: $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 1.4.b)

$$\begin{pmatrix} 12 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. und 2. Zeile: I) $12 = 2 - 2r + 2s$
 II) $-2 = 1 - s$ $s = 3$
 s in I) $12 = 2 - 2r + 6$ $r = -2$
 mit 3. Zeile überprüfen: r, s in III) $-2 = 2 - 4$ wahre Aussage
 Ergebnis: Punkt D liegt in der Ebene

Aufgabe 1.4.c)

x-y-Ebene ist $E_{xy}: \vec{x} = u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

gleichsetzen mit der Ebenengleichung ergibt folgendes Gleichungssystem:

I) $u = 2 - 2r + 2s$
 II) $v = 1 - s$ $s = 1 - v$
 III) $0 = 2 + 2r$ $r = -1$
 r in I) $u = 2 + 2 + 2s$
 II in I) $u = 4 + 2(1 - v)$ $u = 6 - 2v$

in die Gleichung der x-y-Ebene einsetzen:

$$g_{xy}: (6 - 2v) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2v \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1.4.d)

Ursprungsgerade durch A: $g: \vec{x} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Normalenvektor der Ebene: $\vec{n} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, wobei $\vec{n} \perp \vec{r}_1 \wedge \vec{n} \perp \vec{r}_2$

D.h. die Skalarprodukte von Normalenvektor und den Richtungsvektoren müssen = 0 sein.

Gleichungssystem: I) $-2x + 0y + 2z = 0$
 II) $2x - 1y + 0z = 0$ | gewählt: $y = 2$
 I) $-2x + 2z = 0$
 II) $2x = 2$ | $x = 1$
 x, y in I) $-2 = -2z$ | $z = 1$

Ergebnis: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Schnittwinkel des Richtungsvektors der Geraden mit dem Normalenvektor der Ebene:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{r}_g \cdot \vec{n}}{|\vec{r}_g| \cdot |\vec{n}|} = \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{6}{3 \cdot \sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2 \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{2 \cdot \sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\alpha = 35,3^\circ$$

Schnittwinkel ist 90° minus Ergebnis, um den Winkel zwischen Gerade und Ebene zu erhalten:

$$\gamma = 90^\circ - 35,3^\circ = 54,7^\circ$$

Aufgabe 1.4.e)

Ohne Verschiebungsvektor wird aus der Ebene eine Ursprungsebene:

$$E_2: \vec{x} = r \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1.4.f)

Länge des Normalenvektors berechnen: $|\vec{n}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$

Normieren des Normalenvektors: $\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Abstand berechnen:

$$|0E| = \vec{n}_0 \cdot \vec{v}_E = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \frac{6 \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{6 \cdot \sqrt{6}}{6} = \sqrt{6} \text{ LE}$$

Aufgabe 1.5.a)

Die Ergebnisse werden in der kumulierten Binomialtabelle abgelesen:

- 1) $n=10, k=3 \rightarrow P(X \leq 3) = 0,6496$
- 2) $n=10, k=3$ minus $k=2 \rightarrow P(X=3) = 0,2668$
- 3) $n=10, k=2 \rightarrow 1 - P(X \leq 2) = 0,6172$
- 4) $n=10, k=3 \rightarrow 1 - P(X \leq 3) = 0,3504$

Aufgabe 1.5.b)

$$E(X) = n \cdot p = 10 \cdot 0,3 = 3 \text{ Kugeln}$$

Aufgabe 1.5.c)

Für 0mal „weiß“ ist die Wahrscheinlichkeit: $P(X=0) = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{42}{90}$

Für 1mal „weiß“ ist die Wahrscheinlichkeit: $P(X=1) = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} + \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{42}{90}$

Für 2mal „weiß“ ist die Wahrscheinlichkeit: $P(X=2) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{6}{90}$

zu erwartender Gewinn:

$$E(X) = 1,00\text{€} \cdot \frac{42}{90} + 2,00\text{€} \cdot \frac{42}{90} + 3,00\text{€} \cdot \frac{6}{90} = 1,60\text{€} = \text{fairer Einsatz}$$

Aufgabe 1.5.d)

Für drei weiße Kugeln gilt: $P(X = 3w) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{6}{720}$

Für drei schwarze Kugeln gilt: $P(X = 3s) = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8} = \frac{210}{720}$

Ergebnis: $P(X) = \frac{6}{720} + \frac{210}{720} = \frac{216}{720} = \frac{3}{10}$