Lösung der Abitur-Übung 2:

Aufgabe 2.1.a)

Funktion allgemein:	$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$		
Ableitungen allgemein:	$f'(x)=3ax^2+2bx+c$		
	$f''(x)=6ax+2b$		
SP mit Geraden bei (-1/0)	$f(-1)=0$	$0=-a+b-c+d$	weil: $g(-1)=0$
Berührungspunkt im WP (1/2)	$f(1)=2$	$2=a+b+c+d$	weil: $t(1)=2$
Steigung im WP ist m=-3	$f'(1)=-3$	$-3=3a+2b+c$	weil: $t'(1)=-3$
Wendepunkt bei x=1	$f''(1)=0$	$0=6a+2b$	notwendige Bedingung
Gleichungssystem:	I)	$0=-a+b-c+d$	
	II)	$2=a+b+c+d$	
	III)	$-3=3a+2b+c$	
	IV)	$0=6a+2b$	
	I)	$0=-a+b-c+d$	
	I-II=II)	$-2=-2a-2c$	
	III)	$-3=3a+2b+c$	
	IV)	$0=6a+2b$	
	I)	$0=-a+b-c+d$	
	II)	$-2=-2a-2c$	
	II+2·III=III)	$-8=4a+4b$	
	IV)	$0=6a+2b$	
	I)	$0=-a+b-c+d$	
	II)	$-2=-2a-2c$	
	III)	$-8=-8a-4b$	
	III-2·IV=IV)	$-8=-8a$	$\underline{\underline{a=1}}$
	a in IV)	$0=6+2b$	$\underline{\underline{b=-3}}$
	a in II)	$-2=-2-2c$	$\underline{\underline{c=0}}$
	a,b,c in I)	$0=-1-3+d$	$\underline{\underline{d=4}}$
	Lösung: $f(x)=x^3-3x^2+4$		

Aufgabe 2.1.b)

1.) Definitionsbereich: $\mathbb{D}=\mathbb{R}$

2.) Nullstellen, Bedingung: $f(x)=0$

erste Nullstelle raten; möglich sind ±1; ±2 oder ±4 (ganze Teiler der Konstanten d=4)

Probe für x=1: $f(1)=1^3-3\cdot 1^2+4=2\neq 0$ d.h. keine Nullstelle für x=1

Probe für x=-1: $f(-1)=(-1)^3-3\cdot(-1)^2+4=-1-3+4=0$ Nullstelle für x=-1

Polynomdivision durch den Linearfaktor $(x+1)$

$$
\begin{array}{l}
(x^3-3x^2+0x+4):(x+1)=x^2-4x+4 \\
\underline{-(x^3+x^2)} \\
\quad -4x^2 \\
\quad \underline{-(-4x^2-4x)} \\
\qquad\quad 4x \\
\qquad \underline{-(4x+4)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

zweite und dritte Nullstelle über die pq-Formel für: $x^2 - 4x + 4 = 0$

$x_{2,3} = 2 \pm \sqrt{0}$

$x_{2,3} = 2$

N_1 (-1/0) $N_{2;3}$ (2/0)

3.) Extremwerte (Maximum, Minimum)

a) notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$f'(x) = 3x^2 - 6x$

$0 = 3x^2 - 6x \quad |:3$

$0 = x^2 - 2x = x(x-2)$

$x_1 = 0 \quad \vee \quad x_2 = 2$

b) hinreichende Bedingung: $f''(x_{1,2}) \neq 0$

$f''(x) = 6x - 6$

$f''(0) = 6 \cdot 0 - 6 = -6 < 0$ Maximum bei x = 0

$f''(2) = 6 \cdot 2 - 6 = 6 > 0$ Minimum bei x = 2

c) y-Koordinaten:

$f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 4 = 4$ Maximum $(0/4)$

$f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 4 = 0$ Minimum $(2/0)$

4.) Wendepunkt

a) notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

$f''(x) = 6x - 6$

$0 = 6x - 6 \quad |+6 \quad |:6$

$x_1 = 1$

b) hinreichende Bedingung: $f'''(1) \neq 0$

$f'''(x) = 6$

$f'''(1) = 6 > 0$ Wendepunkt bei x = 1 mit einer rechts-links Krümmung

c) y-Koordinate:

$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 4 = 2$ Wendepunkt $(1/2)$

5.) Randverhalten

a) Verhalten des Graphen für $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to\infty}\left[x^3\left(\frac{x^3}{x^3} - \frac{3x^2}{x^3} + \frac{4}{x^3}\right)\right]$$ höchste Potenz wurde ausgeklammert

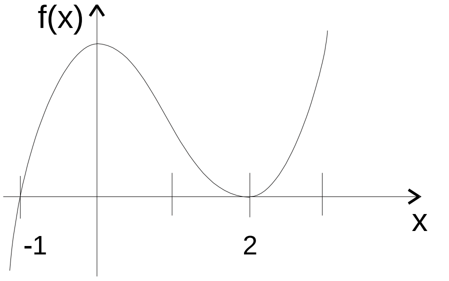
$$= \lim_{x\to\infty}\left[x^3\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^3}\right)\right] = \infty \cdot (1 - 0 + 0) = \infty$$

b) Verhalten des Graphen für $x \to -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[x^3\left(\frac{x^3}{x^3} - \frac{3x^2}{x^3} + \frac{4}{x^3}\right)\right]$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left[x^3\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^3}\right)\right] = -\infty \cdot (1 - 0 + 0) = -\infty$$

6.) Skizze:



Aufgabe 2.1.c)

Die Grenzen sind die Nullstellen der Funktion.

$$A=\left|\int_{-1}^{2}(x^3-3x^2+4)dx\right|=\left|\left[\frac{1}{4}x^4-x^3+4x\right]_{-1}^{2}\right|$$

$$=\left|\left[\frac{1}{4}2^4-2^3+4\cdot 2\right]-\left[\frac{1}{4}\cdot(-1)^4-\cdot(-1)^3+4\cdot(-1)\right]\right|=\left|4-\left(-\frac{11}{4}\right)\right|=\left|\frac{16}{4}+\frac{11}{4}\right|=\frac{27}{4}=6\frac{3}{4}FE$$

Aufgabe 2.1.d)

a) x-Koordinaten der Schnittpunkte durch Gleichsetzen berechnen:

$x^3-3x^2+4=x+1$ | -x-1

$x^3-3x^2-x+3=0$

erste Nullstelle raten; möglich sind ±1 oder ±3 (ganze Teiler der Konstanten d=3)

Probe für x=1: $f(1)=1^3-3\cdot 1^2-1+3=0$ d.h. Nullstelle für x=1

Polynomdivision durch den Linearfaktor $(x-1)$

$$\begin{array}{l}(x^3-3x^2-x+3):(x-1)=x^2-2x-3\\ \underline{-(x^3-x^2)}\\ \quad -2x^2\\ \quad \underline{-(-2x^2+2x)}\\ \qquad -3x\\ \qquad \underline{-(-3x+3)}\\ \qquad\quad 0\end{array}$$

zweite und dritte Nullstelle über die pq-Formel für: $x^2-2x-3=0$

$$x_{2,3}=1\pm\sqrt{1+3}$$

$$x_{2,3}=1\pm 2$$

N_1 (1/0) N_2 (-1/0) N_3 (3/0)

b) Flächen berechnen:

$$A_1=\left|\int_{-1}^{1}\left(x^3-3x^2-x+3\right)dx\right|=\left|\left[\frac{1}{4}x^4-x^3-\frac{1}{2}x^2+3x\right]_{-1}^{1}\right|$$

$$=\left|\left[\frac{1}{4}-1-\frac{1}{2}+3\right]-\left[\frac{1}{4}+1-\frac{1}{2}-3\right]\right|=\left|\left[\frac{1}{4}-\frac{4}{4}-\frac{2}{4}+\frac{12}{4}\right]-\left[\frac{1}{4}+\frac{4}{4}-\frac{2}{4}-\frac{12}{4}\right]\right|$$

$$=\left|\frac{7}{4}+\frac{9}{4}\right|=\frac{16}{4}=4FE$$

$$A_2 = \left| \int_1^3 \left(x^3 - 3x^2 - x + 3\right) dx \right| = \left| \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x \right]_1^3 \right|$$

$$= \left| \left[\frac{81}{4} - 27 - \frac{9}{2} + 9 \right] - \left[\frac{1}{4} - 1 - \frac{1}{2} + 3 \right] \right| = \left| \left[\frac{81}{4} - \frac{108}{4} - \frac{18}{4} + \frac{36}{4} \right] - \left[\frac{1}{4} - \frac{4}{4} - \frac{2}{4} + \frac{12}{4} \right] \right|$$

$$= \left| -\frac{9}{4} - \frac{7}{4} \right| = \left| -\frac{16}{4} \right| = \frac{16}{4} = 4FE$$

Aufgabe 2.1.e)

1.) Zielfunktion aufstellen:

HB:	$A = x \cdot t(x)$	;wobei t(x) = Wendetangente
NB:	$t(x) = -3x + 5$	;NB in HB einsetzen
Fkt:	$f(x) = -3x^2 + 5x$	;den Extremwert bestimmen

2.) 1. Ableitung bilden und den Extremwert berechnen:

$f'(x) = -6x + 5$;gleich Null setzen

a) notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$0 = -6x + 5 \quad | + 6x$

$6x = 5 \quad | : 6$

$x = \frac{5}{6}$

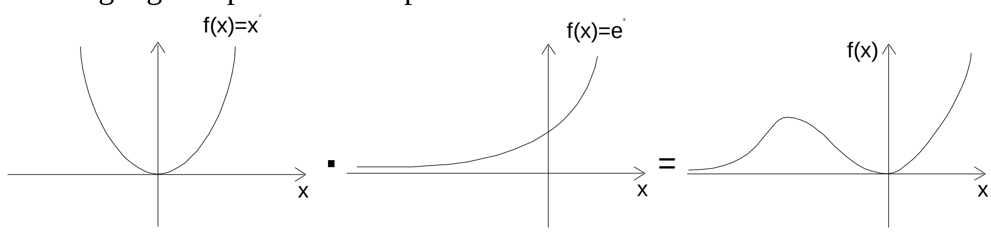
b) hinreichende Bedingung: $f''\left(\frac{5}{6}\right) \neq 0$

$f''\left(\frac{5}{6}\right) = -6 < 0$ d.h. Maximum für $x = \frac{5}{6}$

c) Ergebnis: Das maximale Rechteck entsteht für $x = \frac{5}{6}$.

Aufgabe 2.2.a)

Vorüberlegung: Graphische Multiplikation der Parabel und der *e*-Funktion



Der Einfluß der Exponentialfunktion ist größer als der einer Potenzfunktion. Deshalb läuft der Graph gegen Null, wenn *x* gegen minus Unendlich läuft.

1) Definitionsbereich: ID = IR

2) Nullstelle:

$$0 = x^2 \cdot e^x$$
$$0 = x^2 \quad \vee \quad 0 = e^x$$
$$x_{1,2} = 0 \qquad L = \{\}$$
$$\mathrm{N}(0/0)$$

3) Extremwerte (Maximum, Minimum)

a) notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = e^x\left(x^2 + 2x\right)$$
$$0 = e^x\left(x^2 + 2x\right)$$
$$e^x = 0 \quad \vee \quad x^2 + 2x = x(x+2) = 0$$
$$L = \{\} \qquad x_1 = 0 \quad \vee \quad x + 2 = 0$$
$$x_2 = -2$$

b) hinreichende Bedingung: $f''(x_{1,2}) \neq 0$

$$f''(x) = e^x\left(x^2 + 2x\right) \cdot e^x(2x+2) = e^x\left(x^2 + 4x + 2\right)$$
$$f''(-2) = e^{-2}\left((-2)^2 + 4 \cdot (-2) + 2\right) = \frac{1}{e^2}(4 - 8 + 2) = -\frac{2}{e^2} < 0$$ d.h. Maximum bei x = -2
$$f''(0) = e^0\left(0^2 + 4 \cdot 0 + 2\right) = 1 \cdot 2 = 2 > 0$$ d.h. Minimum bei x = 0

c) y-Koordinaten:

$$f(-2) = (-2)^2 \cdot e^{-2} = \frac{4}{e^2} \approx 0{,}541$$
$$f(0) = 0^2 \cdot e^0 = 0 \cdot 1 = 0$$

Ergebnisse: Maximum $\left(-2 \middle/ \frac{4}{e^2}\right)$ Minimum $(0/0)$

4.) Wendepunkte

a) notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

$$f''(x) = e^x\left(x^2 + 4x + 2\right)$$
$$0 = e^x\left(x^2 + 4x + 2\right)$$
$$e^x = 0 \quad \vee \quad x^2 + 4x + 2 = 0$$
$$L = \{\} \qquad x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-2}$$
$$x_1 = -2 + \sqrt{2} \approx -0{,}586$$
$$x_2 = -2 - \sqrt{2} \approx -3{,}41$$

b) hinreichende Bedingung: $f'''(x_{WP}) \neq 0$

$$f'''(x) = e^x\left(x^2 + 4x + 2\right) + e^x(2x+4) = e^x\left(x^2 + 6x + 6\right)$$
$$f'''(-2+\sqrt{2}) = e^{-2+\sqrt{2}}\left(\left(-2+\sqrt{2}\right)^2 + 6\left(-2+\sqrt{2}\right) + 6\right) = \frac{e^{\sqrt{2}}}{e^2}\left(4 - 4\sqrt{2} + 2 - 12 + 6\sqrt{2} + 6\right)$$
$$= \frac{e^{\sqrt{2}}}{e^2}\left(2\sqrt{2}\right) > 0$$

d.h. Wendepunkt bei $x_1 = -2 + \sqrt{2}$ mit einem rechts-links Krümmungswechsel

$$f'''(-2-\sqrt{2}) = e^{-2-\sqrt{2}}\left(\left(-2-\sqrt{2}\right)^2 + 6\left(-2-\sqrt{2}\right) + 6\right) = \frac{1}{e^{2+\sqrt{2}}}\left(4 + 4\sqrt{2} + 2 - 12 - 6\sqrt{2} + 6\right)$$
$$= \frac{1}{e^{2+\sqrt{2}}}\left(-2\sqrt{2}\right) < 0$$

d.h. Wendepunkt bei $x_2 = -2 - \sqrt{2}$ mit einer links-rechts Krümmung

c) y-Koordinaten:

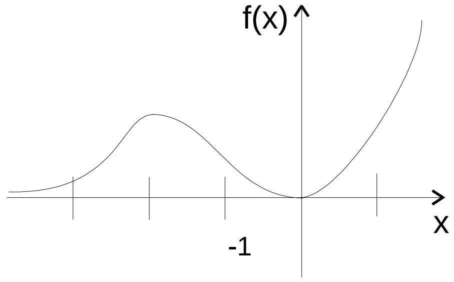
$f(-2-\sqrt{2}) = (-2-\sqrt{2})^2 \cdot e^{-2-\sqrt{2}} \approx 0{,}384$

$f(-2+\sqrt{2}) = (-2+\sqrt{2})^2 \cdot e^{-2+\sqrt{2}} \approx 0{,}191$

Ergebnisse: $WP_1\left(-2-\sqrt{2}\ ;\ (-2-\sqrt{2})^2 \cdot e^{-2-\sqrt{2}}\right)$ $WP_2\left(-2+\sqrt{2}\ ;\ (-2+\sqrt{2})^2 \cdot e^{-2+\sqrt{2}}\right)$

5) linker Rand: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ rechter Rand: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

6) Skizze:



Aufgabe 2.2.b)

$F(x)$ wird nach der Produktregel abgeleitet: $[u \cdot v]' = u'v + uv'$

$F'(x) = f(x) = e^x(x^2-2x+2) + e^x(2x-2) = e^x(x^2-2x+2x+2-2) = e^x \cdot x^2$

Aufgabe 2.2.c)

$$A = \int_0^2 x^2 e^x\,dx = \left[e^x(x^2-2x+2)\right]_0^2 = (2e^2-2)FE$$

Aufgabe 2.2.d)

allgemeine Geradengleichung: $y = mx + b$;wobei m die Steigung $f'(x)$ ist

a) für die erste Wendetangente $t_1(x)$ gilt:

$x = -2-\sqrt{2}$

$y = f(-2-\sqrt{2}) = (-2-\sqrt{2})^2 \cdot e^{-2-\sqrt{2}}$

$m = f'(-2-\sqrt{2}) = \left[\left(-2-\sqrt{2}\right)^2 + 2\left(-2-\sqrt{2}\right)\right] \cdot e^{-2-\sqrt{2}} = \left(4+4\sqrt{2}+2-4-2\sqrt{2}\right) \cdot e^{-2-\sqrt{2}} =$

$= \left(2+2\sqrt{2}\right) \cdot e^{-2-\sqrt{2}}$

in die allgemeine Geradengleichung einsetzen und b berechnen:

$\left(-2-\sqrt{2}\right)^2 \cdot e^{-2-\sqrt{2}} = \left(2+2\sqrt{2}\right) \cdot e^{-2-\sqrt{2}} \cdot \left(-2-\sqrt{2}\right) + b \qquad \Big| - \left[\left(2+2\sqrt{2}\right) \cdot e^{-2-\sqrt{2}} \cdot \left(-2-\sqrt{2}\right)\right]$

$\left[\left(-2-\sqrt{2}\right) - \left(2+2\sqrt{2}\right) \cdot \left(-2-\sqrt{2}\right)\right] \cdot e^{-2-\sqrt{2}} = b$

$\left[\left(-2-\sqrt{2}\right) - \left(-4-2\sqrt{2}-4\sqrt{2}-4\right)\right] \cdot e^{-2-\sqrt{2}} = b$

$\left(-8-6\sqrt{2}\right) \cdot e^{-2-\sqrt{2}} = b$

m und b in die Geradengleichung einsetzen:

$t_1(x) = \left(2+2\sqrt{2}\right) \cdot e^{-2-\sqrt{2}}\ x + \left(-8-6\sqrt{2}\right) \cdot e^{-2-\sqrt{2}}$

b) für die zweite Wendetangente $t_2(x)$ gilt:

$$x=-2+\sqrt{2}$$
$$y=f(-2+\sqrt{2})=(-2+\sqrt{2})^2\cdot e^{-2+\sqrt{2}}$$
$$m=f'(-2+\sqrt{2})=\left[\left(-2+\sqrt{2}\right)^2+2\left(-2+\sqrt{2}\right)\right]\cdot e^{-2+\sqrt{2}}=\left(4-4\sqrt{2}+2-4+2\sqrt{2}\right)\cdot e^{-2+\sqrt{2}}=$$
$$=\left(2-2\sqrt{2}\right)\cdot e^{-2+\sqrt{2}}$$

in die allgemeine Geradengleichung einsetzen und b berechnen:

$$\left(-2+\sqrt{2}\right)^2\cdot e^{-2-\sqrt{2}}=\left(2-2\sqrt{2}\right)\cdot e^{-2-\sqrt{2}}\cdot\left(-2-\sqrt{2}\right)+b \qquad \left|-\left[\left(2-2\sqrt{2}\right)\cdot e^{-2-\sqrt{2}}\cdot\left(-2-\sqrt{2}\right)\right]\right.$$
$$\left[\left(-2-\sqrt{2}\right)-\left(2-2\sqrt{2}\right)\cdot\left(-2-\sqrt{2}\right)\right]\cdot e^{-2-\sqrt{2}}=b$$
$$\left[\left(-2-\sqrt{2}\right)-\left(-4-2\sqrt{2}+4\sqrt{2}+4\right)\right]\cdot e^{-2-\sqrt{2}}=b$$
$$\left(-2-3\sqrt{2}\right)\cdot e^{-2-\sqrt{2}}=b$$

m und b in die Geradengleichung einsetzen:

$$t_2(x)=\left(2-2\sqrt{2}\right)\cdot e^{-2-\sqrt{2}}\ x+\left(-2-3\sqrt{2}\right)\cdot e^{-2-\sqrt{2}}$$

Aufgabe 2.3.a)

1.) Definitionsbereich: $\mathbb{D}=\mathbb{R}$
da der Nenner keine Nullstellen hat

2.) Symmetrie
Prüfung auf Punktsymmetrie: Bedingung: $f(x)=-f(-x)$

$$\frac{8x}{x^2+3}=-\left(\frac{8\cdot(-x)}{(-x)^2+3}\right)=-\frac{-8x}{x^2+3}=\frac{8x}{x^2+3}$$

Die Funktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

3.) Nullstellen; Bed.: $f(x)=0$

$$0=\frac{8x}{x^2+3} \qquad |\cdot\text{Nenner}$$
$$0=8\text{x} \qquad |:8$$
$$0=\text{x}$$
$$\text{N}(0;\ 0)$$

4.) keine Unstetigkeitsstellen, da der Definitionsbereich nicht eingeschränkt ist

5.) Extremwerte:

a) notwendige Bedingung: $f'(x)=0$

Quotientenregel: $\left[\frac{u}{v}\right]'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f'(x)=\frac{8\cdot(x^2+3)-8x\cdot 2x}{(x^2+3)^2}=\frac{8x^2+24-16x^2}{(x^2+3)^2}$$

$$0 = \frac{-8x^2 + 24}{(x^2+3)^2} \quad | \cdot \text{Nenner}$$

$$0 = -8x^2 + 24 \quad | +8x^2$$

$$8x^2 = 24 \quad |:8$$

$$x^2 = 3 \quad | \sqrt{\ }$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$$

b) hinreichende Bedingung: $f''(\pm\sqrt{3}) \neq 0$

$$f''(x) = \frac{-16x \cdot (x^2+3)^2 - (-8x^2+24) \cdot 2(x^2+3) \cdot 2x}{(x^2+3)^4} \quad | \left(x^2+3\right) \text{kürzen}$$

$$f''(x) = \frac{-16x \cdot (x^2+3) - (-8x^2+24) \cdot 4x}{(x^2+3)^3}$$

$$f''(x) = \frac{-16x^3 - 48x + 32x^3 - 96x}{(x^2+3)^3} = \frac{16x^3 - 144x}{(x^2+3)^3}$$

$$f''(\sqrt{3}) = \frac{16 \cdot \sqrt{3}^3 - 144 \cdot \sqrt{3}}{(\sqrt{3}^2+3)^3} = \frac{16 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} - 144 \cdot \sqrt{3}}{6^3} = -\frac{96 \cdot \sqrt{3}}{216} < 0$$

d.h. Maximum für $x = \sqrt{3}$

$$f''(-\sqrt{3}) = \frac{16 \cdot (-\sqrt{3})^3 - 144 \cdot (-\sqrt{3})}{\left[\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 3\right]^3} = \frac{16 \cdot 3 \cdot (-\sqrt{3}) - 144 \cdot (-\sqrt{3})}{6^3} = \frac{96 \cdot \sqrt{3}}{216} > 0$$

d.h. Minimum für $x = -\sqrt{3}$

c) y-Koordinaten: $f(x) = y$

$$f(\sqrt{3}) = \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{3}^2 + 3} = \frac{8}{6}\sqrt{3} = \frac{4}{3}\sqrt{3} \quad \text{Maximum} \left(\sqrt{3} \middle/ \frac{4}{3}\sqrt{3}\right)$$

$$f(-\sqrt{3}) = \frac{-8\sqrt{3}}{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 3} = -\frac{8}{6}\sqrt{3} = -\frac{4}{3}\sqrt{3} \quad \text{Minimum} \left(-\sqrt{3} \middle/ -\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)$$

6) Wendepunkte

a) notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

$$f''(x) = \frac{16x^3 - 144x}{(x^2+3)^3}$$

$$0 = \frac{16x^3 - 144x}{(x^2+3)^3} \quad | \cdot \text{Nenner}$$

$$0 = x \cdot (16x^2 - 144)$$

$$x_1 = 0 \quad \vee \quad 16x^2 - 144 = 0$$

$$16x^2 = 144 \quad |:16$$

$$x^2 = 9 \quad | \sqrt{\ }$$

$$x_{2,3} = \pm 3$$

b) hinreichende Bedingung: $f'''(x_{WP}) \neq 0$

$$f'''(x)=\frac{(48x^2-144)\cdot(x^2+3)^3-(16x^3-144x)\cdot 3(x^2+3)^2\cdot 2x}{(x^2+3)^6} \qquad |\,(x^2+3) \text{ kürzen}$$

$$f'''(x)=\frac{(48x^2-144)\cdot(x^2+3)^2-(16x^3-144x)\cdot 6x\cdot(x^2+3)}{(x^2+3)^5}$$

$$f'''(x)=\frac{(48x^2-144)\cdot(x^4+6x^2+9)-(16x^3-144x)\cdot(6x^3+18x)}{(x^2+3)^5}$$

$$f'''(x)=\frac{(48x^6+144x^4-432x^2-1296)-(96x^6-576x^4-2592x^2)}{(x^2+3)^5}$$

$$f'''(x)=\frac{-48x^6+720x^4-2160x^2-1296}{(x^2+3)^5}$$

x-Werte einsetzen:

$$f'''(-3)=\frac{-48\cdot(-3)^6+720\cdot(-3)^4-2160\cdot(-3)^2-1296}{\left[(-3)^2+3\right]^5}=\frac{2592}{12^5}>0$$

$$f'''(0)=\frac{-48\cdot 0^6+720\cdot 0^4-2160\cdot 0^2-1296}{(0^2+3)^5}=\frac{-1296}{3^5}<0$$

$$f'''(3)=\frac{-48\cdot 3^6+720\cdot 3^4-2160\cdot 3^2-1296}{(3^2+3)^5}=\frac{2592}{12^5}>0$$

c) y-Koordinaten: $f(x) = y$

$$f(-3)=\frac{8\cdot(-3)}{(-3)^2+3}=-\frac{24}{12}=-2 \qquad \text{WP}_1\ \left(-3\,/-2\right)$$

$$f(0)=\frac{8\cdot 0}{0^2+3}=0 \qquad \text{WP}_1\ \left(0/0\right)$$

$$f(3)=\frac{8\cdot 3}{3^2+3}=\frac{24}{12}=2 \qquad \text{WP}_1\ \left(3\,/2\right)$$

$\text{WP}_1\ \left(-3\,/-2\right)$ mit einer rechts-links Krümmung

$\text{WP}_2\ \left(0/0\right)$ mit einer links-rechts Krümmung

$\text{WP}_3\ \left(3\,/2\right)$ mit einer rechts-links Krümmung

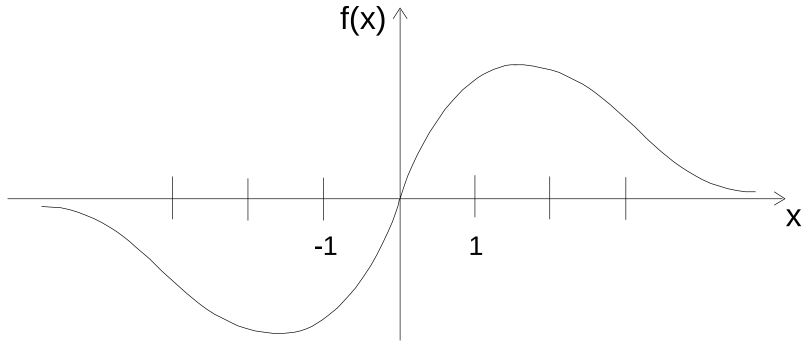
7.) Randverhalten:

Nenner und Zähler durch die höchste Nennerpotenz teilen.

a) linker Rand: $$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{8x}{x^2+3}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\frac{8x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{3}{x^2}}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\frac{8}{x}}{1+\frac{3}{x^2}}\right)=\frac{0}{1+0}=0$$

b) rechter Rand: $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{8x}{x^2+3}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{8x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{3}{x^2}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{8}{x}}{1+\frac{3}{x^2}}\right)=\frac{0}{1+0}=0$$

8.) Skizze:



Aufgabe 2.4.a)

allgemeine Geradengleichung ist g: $\vec{x} = \vec{v} + t\,\vec{r}$

Verschiebungsvektor ist $\vec{v} = \vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Richtungsvektor ist $\vec{r} = \vec{q} - \vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösung: g_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2.4.b)

x-y Ebene: E_{xy}: $\vec{x} = u\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit Gerade g_1 gleichsetzen ergibt

I) $u = 2 + t$

II) $v = 3$

III) $0 = 4 + t \quad \Leftrightarrow \quad t = -4$

t in die Geradengleichung einsetzen:

g_1 :$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + (-4) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ergebnis: $SP(-2/3/0)$

Aufgabe 2.4.c)

x-z Ebene: E_{xz}: $\vec{x} = u\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit Gerade g_1 gleichsetzen ergibt

$$\begin{aligned} \text{I)} \quad & u = 2 + t \\ \text{II)} \quad & 0 = 3 \qquad \rightarrow \text{ falsche Aussage, d.h. keine Lösung} \\ \text{III)} \quad & v = 4 + t \end{aligned}$$

Ergebnis: es gibt keinen Spurpunkt auf der *x*-z Ebene

Aufgabe 2.4.d)

allgemeine Ebenengleichung ist g: $\vec{x} = \vec{v} + s\,\vec{r}_1 + t\,\vec{r}_2$

Verschiebungsvektor ist $\vec{v} = \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

1. Richtungsvektor ist $\vec{r}_1 = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

2. Richtungsvektor ist $\vec{r}_2 = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

Lösung: $E_1: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2.4.e)

Punkt in die Ebenengleichung einsetzen:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

ergibt das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \text{I)} \quad & 1 = 4 - 3s \qquad \Leftrightarrow \quad s = 1 \\ \text{II)} \quad & 2 = -2 + 2s + 2t \\ \text{III)} \quad & 3 = 5 + 2s - 4t \end{aligned}$$

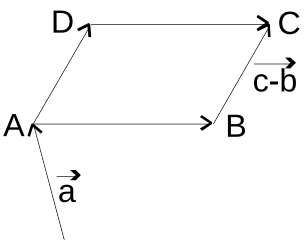
s in II) eingesetzt ergibt: $t = 1$

s, *t* in III) eingesetzt ergibt: 3 = 3 ,dh. wahre Aussage, Lösung ist auch für III) richtig

Lösung: Die Ebenengleichung ergibt für $s = 1$ und $t = 1$ den Punkt *R*.

Aufgabe 2.4.f)

Skizze:



Ortsvektor $\vec{d} = \vec{a} + \vec{c} - \vec{b}$ ergibt den Punkt D$(7/\text{-}2/\text{-}1)$

Aufgabe 2.4.g)

y-z Ebene: E_{yz}: $\vec{x} = u\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$;mit der Ebenengleichung E_1 gleichsetzen:

$$u\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-2\\5\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-3\\2\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\2\\-4\end{pmatrix}$$

$$\text{I)}\quad 0 = 4 - 3s \qquad \Leftrightarrow \quad s = \frac{4}{3}$$

$$\text{II)}\quad u = -2 + 2s + 2t$$

$$\underline{\text{III)}\quad v = 5 + 2s - 4t}$$

$$2\cdot\text{II)} + \text{III)}\quad 2u + v = 1 + 8 \qquad \Leftrightarrow \quad v = 9 - 2u$$

Zwischenlösung in die Ebenengleichung E_{yz} einsetzen:

$$\vec{x} = u\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + (9-2u)\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = u\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 9\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - 2u\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\9\\0\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$$

Spurgerade SG: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\9\\0\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$

Aufgabe 2.4.h)

Bildung des Normalenvektors der Ebene E_1:

$$\text{I)}\quad -3x + 2y + 2z = 0 \qquad \text{wähle } x = 1$$

$$\underline{\text{II)}\quad 2y - 4z = 0}$$

$$\text{I)}\quad 2y + 2z = 3$$

$$\underline{\text{II)}\quad 2y - 4z = 0}$$

$$\text{I)} - \text{II)}\quad 6z = 3 \qquad \Leftrightarrow \quad z = \frac{1}{2}$$

z in II) $\quad 2y = 2 \qquad \Leftrightarrow \quad y = 1$

Normalenvektor von E_1 ist: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ $\quad$ strecke mit Faktor 2 : $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Bildung der Normalenform der Ebenengleichung E_1:

$$E_1: \quad \vec{x} \bullet \vec{n} = \vec{v} \bullet \vec{n}$$

$$\vec{x} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 \cdot 2 - 2 \cdot 2 + 5 \cdot 1 = 9$$

Bestimmung der Länge des Normalenvektors: $|\vec{n}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$|\vec{n}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$$

Bildung der Hesseschen Normalenform: $0 = \dfrac{\vec{x} \bullet \vec{n} + \vec{v} \bullet \vec{n}}{|\vec{n}|}$

$$0 = \frac{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 9}{3}$$

Berechnung des Abstandes zum Punkt S; dazu die Koordinaten von S für $\vec{x}$ einsetzen:

$$|SE_1| = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 9}{3} = \frac{6 + 8 + 4 \ + 9}{3} = \frac{27}{3} = 9\,LE$$

Der Abstand der Ebene E_1 zum Punkt S beträgt $d = 9\,LE$

Aufgabe 2.4.i)

Die Ebenen- und die Geradengleichung gleichsetzen: $E_1 = g_1$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lll} \text{I)} & 4-3s = 2+k & \mid -4-k \\ \text{II)} & -2+2s+2t = 3 & \mid +2 \\ \text{III)} & 5+2s-4t = 4+k & \mid -5-k \\ \hline \text{I)} & -3s \quad -k = -2 & \\ \text{II)} & 2s+2t = 5 & \\ \text{III)} & 2s-4t-k = -1 & \mid 2\cdot\text{II)}+\text{III)} = \text{III)} \\ \hline \text{I)} & -3s \quad -k = -2 & \\ \text{II)} & 2s+2t = 5 & \\ \text{III)} & 6s \quad -k = 9 & \mid 2\cdot\text{I)}+\text{III)} = \text{I)} \\ \hline \text{I)} & -3k = 5 \quad \Leftrightarrow \quad k = -\frac{5}{3} & \\ \text{II)} & 2s+2t = 5 & \\ \text{III)} & 6s \quad -k = 9 & \end{array}$$

Lösung $t = -\frac{5}{3}$ in g_1 einsetzen ergibt $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{5}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$

Der Durchdringungspunkt ist $SP\left(\frac{1}{3} / 3 / \frac{7}{3}\right)$

Der Winkel zwischen dem Normalenvektor der Ebene und dem Richtungsvektor der Geraden berechnen und das Ergebnis von 90° subtrahieren:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n} \bullet \vec{r}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{r}|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2+1^2}} = \frac{2\cdot 1+2\cdot 0+1\cdot 1}{3\cdot\sqrt{2}} = \frac{3}{3\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\varphi = arc\ \cos\frac{1}{\sqrt{2}} = 45°$$

Das ist der Winkel zwischen dem Normalenvektor der Ebene und der Geraden. Der Winkel zwischen Ebene und Gerade ist die Differenz zu 90°:

Lösung: $\alpha = 90° - 54{,}74° = 35{,}26°$

Aufgabe 2.4.k)

Verschiebungsvektor ist der Ortsvektor von Punkt T, Richtungsvektor ist der Normalenvektor der Ebene E_1

Lösung: $g_2\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2.5.a)

Beim 2-maligen Würfeln gibt es 36 mögliche Ereignisse. Davon ergeben 15 Ereignisse die Augensumme ≤ 6 und 21 Ereignisse die Augensumme ≥ 7. Dick hat eine Gewinnwahrscheinlichkeit von $\frac{15}{36}$. Doof hat eine Gewinnwahrscheinlichkeit von $\frac{21}{36}$. Doof hat eine größere Gewinnwahrscheinlichkeit. Das Spiel ist nicht fair.

Aufgabe 2.5.b)

$$E(X) = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 5\cdot\frac{1}{6} + 6\cdot\frac{1}{6} = 21\cdot\frac{1}{6} = 3{,}5$$

$$V(X) = (1-3{,}5)^2\cdot\frac{1}{6} + (2-3{,}5)^2\cdot\frac{1}{6} + ... + (6-3{,}5)^2\cdot\frac{1}{6} = 17{,}5\cdot\frac{1}{6} = 2{,}92$$

Aufgabe 2.5.c)

Berechnung der Gegenwahrscheinlichkeit: mit höchstens 0,01%iger Sicherheit keine „6“

$$P(X) = \left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0{,}01$$

$$\left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0{,}01 \quad |\log$$

$$\log\left(\frac{5}{6}\right)^n \leq \log 0{,}01 \quad |\text{3.Logarithmengesetz}: \log a^n = n\cdot\log a$$

$$n\cdot\log\left(\frac{5}{6}\right) \leq \log 0{,}01 \quad |:\log\left(\frac{5}{6}\right)$$

$$n \geq \frac{\log 0{,}01}{\log\left(\frac{5}{6}\right)}$$

Bei der Division durch eine negative Zahl dreht sich das Ungleichheitszeichen um!

Ergebnis: $n \geq 26$

Aufgabe 2.5.d)

1) $P(X) = 6\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$

2) Wahrscheinlichkeiten für:

a) 3 gleiche Zahlen: $P(X) = 6\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$

b) 2 gleiche Zahlen: $P(X) = 6\cdot 3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{90}{216} = \frac{15}{36}$

c) Wahrscheinlichkeit für 3 ungleiche Zahlen ist $P(X) = 1 - \frac{1}{36} - \frac{15}{36} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$

3) Wahrscheinlichkeiten für:

a) genau 2-mal die „6“: $P(X) = 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{15}{216}$

b) genau 3-mal die „6“: $P(X) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$

c) Wahrscheinlichkeit für mindestens 2-mal die „6“ ist $P(X) = \frac{15}{216} + \frac{1}{216} = \frac{16}{216} = \frac{2}{27}$

Aufgabe 2.5.e)

Laut Aufgabe 2.5.b) ist der Erwartungswert $E(X)=3,5$. Danach müsste für ein faires Spiel der Einsatz 3,50 € betragen.

Aufgabe 2.5.f)

Berechnung des Erwartungswerts:

$$E(X) = 100 \cdot \frac{1}{6} = \frac{100}{6} = \frac{50}{3} = 16{,}67$$

Berechnung der *k*-Werte bei einer 2σ Umgebung:

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{100 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = 3{,}73 \qquad 2\sigma = 7{,}45$$

k-Werte: $E(X) - 2\sigma \leq k \leq E(X) + 2\sigma$ $\qquad 10 \leq k \leq 24$

Bei einer Toleranz von 2σ sind bei 100 Wiederholungen zwischen 10- und 24-mal die Augenzahl „6“ zu erwarten.