Lösung der Abitur-Übung 4:

Aufgabe 4.1.a)

1. Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$
2. Nullstellen, Bedingung: $f(x) = 0$

$$0 = x^3 - ax = x(x^2 - a)$$

$$x_1 = 0 \quad \vee \quad x^2 - a = 0$$

$$x_{2,3} = \pm\sqrt{a}$$

3. Symmetrie:

Bedingung für Punktsymmetrie zum Ursprung: $f_a(x) = -f_a(-x)$

$$x^3 - ax = -[(-x)^3 - a(-x)]$$

$$= -[-x^3 + ax]$$

$$= x^3 - ax$$ d.h. Punktsymmetrie

4. Extremwerte (Maximum, Minimum):

notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$f_a'(x) = 3x^2 - a$$

$$0 = 3x^2 - a$$

$$\frac{a}{3} = x^2$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{a}{3}}$$

hinreichende Bedingung: $f''(x_{1,2}) \neq 0$

$$f''(x) = 6x$$

$$f''\left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right) = 6 \cdot \sqrt{\frac{a}{3}} > 0$$ d.h. Minimum bei $x = \sqrt{\frac{a}{3}}$

$$f''\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}\right) = 6 \cdot \left(-\sqrt{\frac{a}{3}}\right) < 0$$ d.h. Maximum bei $x = -\sqrt{\frac{a}{3}}$

y-Koordinaten: $f\left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right) = \left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right)^3 - a \cdot \sqrt{\frac{a}{3}} = \frac{a}{3} \cdot \sqrt{\frac{a}{3}} - a \cdot \sqrt{\frac{a}{3}} = -\frac{2a}{3} \cdot \sqrt{\frac{a}{3}}$

$$f\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}\right) = \left(-\sqrt{\frac{a}{3}}\right)^3 - a \cdot \left(-\sqrt{\frac{a}{3}}\right) = \frac{a}{3} \cdot \left(-\sqrt{\frac{a}{3}}\right) - a \cdot \left(-\sqrt{\frac{a}{3}}\right) = -\frac{2a}{3} \cdot \left(-\sqrt{\frac{a}{3}}\right)$$

Maximum $\left(-\sqrt{\frac{a}{3}} \,/\, -\frac{2a}{3} \cdot \left(-\sqrt{\frac{a}{3}}\right)\right)$

Minimum $\left(\sqrt{\frac{a}{3}} \,/\, -\frac{2a}{3} \cdot \sqrt{\frac{a}{3}}\right)$

5. Wendepunkt

notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

$$f''(x) = 6x$$

$$0 = 6x$$

$$x = 0$$

hinreichende Bedingung: $f'''(0) \neq 0$

$$f'''(x) = 6$$

$$f'''(0) = 6 > 0$$ d.h. Wendepunkt bei $x = 0$ mit einer rechts-links Krümmung

y-Koordinate: $f(0) = (0)^3 - a \cdot 0 = 0$

Wendepunkt ist $WP(0/0)$

6. Randverhalten

Verhalten des Graphen für $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to\infty}\left[x^3\left(\frac{x^3}{x^3}-\frac{ax}{x^3}\right)\right]$$ [höchste Potenz ausgeklammert!]

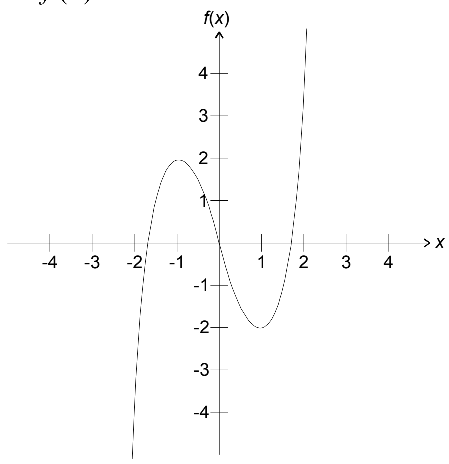
$$=\lim_{x\to\infty}\left[x^3\left(1-\frac{a}{x^2}\right)\right]=\infty\cdot(1-0)=\infty$$

Verhalten des Graphen für $x \to -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[x^3\left(\frac{x^3}{x^3}-\frac{ax}{x^3}\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[x^3\left(1-\frac{a}{x^2}\right)\right]=-\infty\cdot(1-0)=-\infty$$

Skizze für a=3: $f(x)=x^3-3x$:



Aufgabe 4.1.b)

Die Nullstellen liegen bei:

$$x_1=0 \quad \vee \quad x^2-a=0$$

$$x_{2,3}=\pm\sqrt{a}$$

Die Funktion hateine Nullstelle für $a \le 0$

drei Nullstellen für $a > 0$

Eine Potenzfunktion 3.Grades kann maximal 3 Nullstellen haben.

Aufgabe 4.1.c)

Ein Wendepunkt kann an den Nullstellen der zweiten Ableitung liegen. Sie lautet $f''(x)=6x$ da in der Gleichung kein a mehr vorkommt, ist die Lage des Wendepunktes unabhängig von a

Aufgabe 4.1.d)

allgemeine Geradengleichung: $y = mx + b$

Eingesetzt werden einmal die Koordinaten des Minimums und in eine zweite Gleichung die Koordinaten des Maximums. Damit erhält man ein lineares Gleichungssystem. Es soll nun gezeigt werden, daß b = 0 ist, da b den Schnittpunkt mit der y-Achse angibt.

$$\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}\right)^3 - a\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}\right) = m\cdot\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}\right) + b$$

I.) $\sqrt{\frac{a}{3}}^3 - a\sqrt{\frac{a}{3}} = m\cdot\sqrt{\frac{a}{3}} + b$

I.) + II.) ergibt $0 = 2b$ also ist $b = 0$

Aufgabe 4.1.e)

Für $a = 4$ ergeben sich die Nullstellen: $x_1 = -2$; $x_2 = 0$; $x_3 = 2$
Wegen der Symmetrie kann von 0 bis 2 integriert werden. Das Ergebnis wird mit 2 multipliziert.

$$A = 2\cdot\left|\int_0^2 (x^3 - 4x)dx\right| = 2\cdot\left|\left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2\right]_0^2\right| = 2\cdot\left|\left[\left(\frac{1}{4}\cdot 16 - 8\right) - 0\right]\right| = \left|2\cdot(-4)\right| = 8FE$$

Aufgabe 4.1.f)

Die Koordinaten in die Funktion einsetzen und nach a auflösen:
$12 = 2^3 - 2a \quad \Leftrightarrow \quad a = -2$

Aufgabe 4.1.g)

Die x-Koordinate der Nullstelle ist $x_{1,2} = \pm\sqrt{a}$

Es soll gelten: $\pm\sqrt{a} = \pm 3 \quad \Leftrightarrow \quad a = 9$

Aufgabe 4.1.h)

An der Stelle $x = 1$ ist die Steigung $m = -1$, d. h. die erste Ableitung hat den Wert $f'(x) = -1$:
$f_a'(x) = 3x^2 - a \quad \Rightarrow \quad -1 = 3 - a \quad \Leftrightarrow \quad a = 4$

Aufgabe 4.2.a)

1. Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$
2. Nullstellen, Bedingung: $f(x) = 0$

$$0 = 1 - e^{1-x} \quad \Leftrightarrow \quad e^{1-x} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{e^1}{e^x} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad e^1 = e^x \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

3. Extremwerte (Maximum, Minimum)
notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$f'(x) = e^{1-x}$

$0 = e^{1-x} \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \frac{e}{e^x} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \neq e$ d.h. keine Lösung, also keine Extremwerte

4. Wendepunkte
notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

$f''(x) = -e^{1-x}$

$0 = -e^{1-x} \quad \Leftrightarrow \quad 0 = -\frac{e}{e^x} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \neq -e$ d.h. keine Lösung, also keine Wendepunkte

$\mathbb{L} = \{\}$

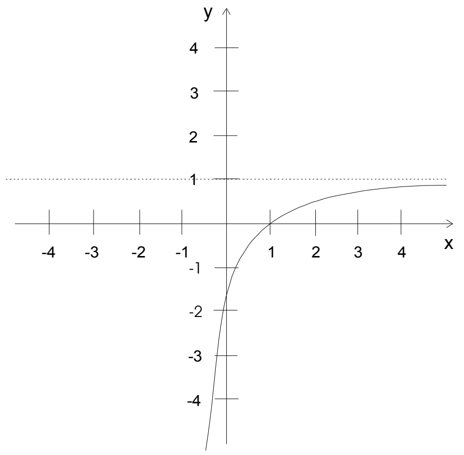
5. Randverhalten
Verhalten des Graphen für $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to\infty}\left[1 - \frac{e}{e^x}\right] = 1 - 0 = 1$$

Verhalten des Graphen für $x \to -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[1 - e\cdot e^x\right] = 1 - \infty = -\infty$$

6. Skizze:



Aufgabe 4.3.a)

1. Definitionsbereich $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{ a \}$

   Die Nullstellen des Nenners sind nicht im Def.-Bereich.

2. Nullstellen $N(-1/0)$

   Die Funktion $=0$ setzen und mit dem Nenner multiplizieren.

3. Verhalten an der Unstetigkeitsstelle

   a) linksseitiger Grenzwert ($x = a - h$)

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{a-h+1}{a-h-a}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{a-h+1}{-h}\right) + \lim_{h\to 0}\left(\frac{a-h+1}{-h}\right) = -\infty$$

   da der Zähler positiv und der Nenner negativ ist; plus geteilt durch minus ergibt minus

   b) rechtsseitiger Grenzwert ($x = a + h$)

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{a+h+1}{a+h-a}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{a+h+1}{h}\right) + \lim_{h\to 0}\left(\frac{a+h+1}{h}\right) = \infty$$

   da der Zähler und der Nenner positiv sind; plus geteilt durch plus ergibt plus

4. Extremwerte (Maximum, Minimum)

notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$0 = \frac{-a-1}{(x-a)^2}$$ keine Lösung, da $-a-1$ nicht 0 werden kann

5. Wendepunkte:

notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

$$0 = \frac{2a+2}{(x-a)^3}$$ keine Lösung, da $2a+2$ nicht 0 werden kann

6. Randverhalten:

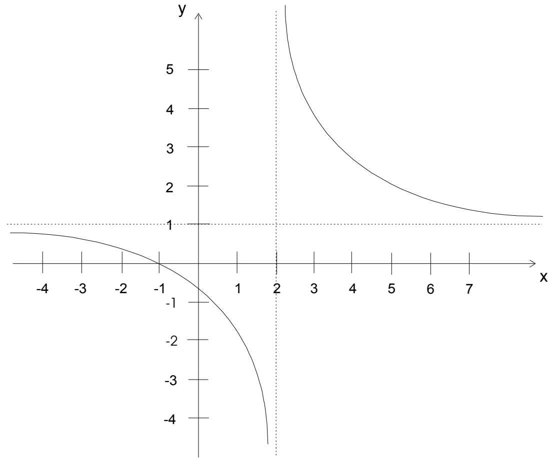
   a) Verhalten des Graphen für $x \to \infty$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-a}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{a^2}{x}}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{a^2}{x}}\right) = \frac{1+0}{1-0} = 1$$

   b) Verhalten des Graphen für $x \to -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x+1}{x-a}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{a^2}{x}}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{a^2}{x}}\right) = \frac{1+0}{1-0} = 1$$

7. Skizze:



Aufgabe 4.3.b)

Polstellen sind Nullstellen des Nenners. Diese dürfen keine Nullstellen des Zählers sein.

$$f_a(x) = \frac{x+1}{(x+a)\cdot(x-a)} = \frac{x+1}{x^2-a^2}$$ ist $a = 1$, gibt es eine Lücke bei $x = -1$

Aufgabe 4.4.a)

Vektoren als Gleichungssystem schreiben, a und b eliminieren und k berechnen:

$$\begin{array}{ll} \text{I)} & 9a + kb = 12 \\ \text{II)} & 4a + 2b = 6 \\ \text{III)} & 3ka - 3b = 6 \end{array}$$

$$4\cdot \text{I} - 9\cdot \text{II} = \text{I)} \quad (4k-18)b = -6 \quad \Leftrightarrow \quad b = -\frac{6}{4k-18}$$

$$\text{II)} \quad 4a + 2b = 6$$

$$3k\cdot \text{II} - 4\cdot \text{III} = \text{III)} \quad (6k+12)b = 18k - 24 \quad \Leftrightarrow \quad b = \frac{18k-24}{6k+12}$$

$$\text{I mit 2 kürzen)} \quad b = -\frac{3}{2k-9}$$

$$\text{III mit 6 kürzen)} \quad b = \frac{3k-4}{k+2}$$

$$\text{I = II setzen)} \quad -\frac{3}{2k-9} = \frac{3k-4}{k+2} \quad |\text{ mit Nennern multiplizieren}$$

$$-3(k+2) = (3k-4)\cdot(2k-9)$$

$$-3k - 6 = 6k^2 - 35k + 36 \quad | +3k+6$$

$$0 = 6k^2 - 32k + 42 \quad |:6$$

$$0 = k^2 - \frac{16}{3}k + 7 \quad | \, pq-\text{Formel}$$

$$k_{1,2} = \frac{8}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2 - 7} = \frac{8}{3} \pm \sqrt{\frac{64}{9} - \frac{63}{9}} = \frac{8}{3} \pm \frac{1}{3}$$

$$k_1 = \frac{9}{3} = 3 \qquad k_2 = \frac{7}{3}$$

Aufgabe 4.4.b)

Die Vektoren, die die Ebene aufspannen, sind die Richtungsvektoren. Der Verschiebungsvektor (= Stützvektor) der Ebene ist der Ortsvektor von Punkt *D*:

$$E_1: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4.4.c)

Der Normalenvektor der Ebene ist der Richtungsvektor der Geraden. Der Ortsvektor von Punkt *D* ist der Verschiebungsvektor (= Stützvektor) der Geraden.

es gilt $\begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \quad \wedge \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \qquad ;\text{wobei} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \text{Normalenvektor}$

als Gleichungssystem geschrieben:

I) $9x + 4y + 9z = 0$

II) $3x + 2y\text{-}3z = 0$ $\quad |\,\text{setze } z = 1$

I) $9x + 4y = -9$

II) $3x + 2y = 3$

I - 2 · II) $3x = -15 \quad |:3$

$x = -5$

x in II) $-15 + 2y = 3 \quad |+15$

$2y = 18 \quad |:2$

$y = 9$

der Normalenvektor ist $\vec{n}_{E1} = \begin{pmatrix} -5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$

die Geradengleichung lautet $g_1: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4.4.d)

zweite Ebene: $E_2: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4.4.e)

Die Ebenen gleichsetzen und als Gleichungssystem schreiben:

$$
\begin{array}{ll}
\text{I)} & 1+9r+3s=12+9n+2m \\
\text{II)} & -2+4r+2s=6+4n+2m \\
\text{III)} & -2+9r-3s=6+6n-3m
\end{array}
$$

Alle Variablen auf die eine Seite, alle Zahlen auf die andere Seite bringen. Wichtig: entweder r und s o d e r n und m eliminieren!

$$
\begin{array}{ll}
\text{I)} & 9r+3s-9n-2m=11 \\
\text{II)} & 4r+2s-4n-2m=8 \\
\text{III)} & 9r-3s-6n+3m=8 \\
\hline
\text{I)} & 9r+3s-9n-2m=11 \\
\text{II)} & 4r+2s-4n-2m=8 \\
\text{I - III = III)} & 6s-3n-5m=3 \\
\hline
\text{I)} & 9r+3s-9n-2m=11 \\
4\cdot\text{I}-9\cdot\text{II}=\text{II)} & -6s+10m=17 \\
\text{I - III = III)} & 6s-3n-5m=3 \\
\hline
\text{I)} & 9r+3s-9n-2m=11 \\
\text{II)} & -6s+10m=17 \\
\text{II + III = III)} & -3n+5m=20 \quad \Leftrightarrow \quad n=-\dfrac{20-5m}{3}=-\dfrac{20}{3}+\dfrac{5}{3}m
\end{array}
$$

Das Ergebnis wird in die Gleichung von E_2 eingesetzt:

$$
g_2: \quad \vec{x}=\begin{pmatrix}12\\6\\6\end{pmatrix}+\left(-\frac{20}{3}+\frac{5}{3}m\right)\cdot\begin{pmatrix}9\\4\\6\end{pmatrix}+m\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\-3\end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix}12\\6\\6\end{pmatrix}-\left(\frac{20}{3}\right)\cdot\begin{pmatrix}9\\4\\6\end{pmatrix}+\left(\frac{5}{3}m\right)\cdot\begin{pmatrix}9\\4\\6\end{pmatrix}+m\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\-3\end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix}12-60\\6-\dfrac{80}{3}\\6-40\end{pmatrix}+m\cdot\begin{pmatrix}15+2\\\dfrac{20}{3}+2\\10-3\end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix}-48\\-62/3\\-34\end{pmatrix}+m\cdot\begin{pmatrix}17\\26/3\\7\end{pmatrix}
$$

Aufgabe 4.4.f)

Der Normalenvektor der zweiten Ebene wird bestimmt (vgl. 4.4.c):

$$\begin{array}{ll} \text{I)} & 9x+4y+6z=0 \\ \underline{\text{II)}} & \underline{2x+2y-3z=0} \quad |\,\text{setze } z=1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{I)} & 9x+4y=-6 \\ \underline{\text{II)}} & \underline{2x+2y=3} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{I - }2\cdot\text{II)} & 5x=-12 \quad |:5 \\ & x=-\frac{12}{5} \end{array}$$

$$x \text{ in II)} -\frac{24}{5}+2y=3 \quad |+\frac{24}{5}$$

$$2y=\frac{15}{5}+\frac{24}{5} \quad |:2$$

$$y=\frac{39}{10}$$

Der Normalenvektor der zweiten Ebene ist $\vec{n}_{E2}=\begin{pmatrix}-12/5\\39/10\\1\end{pmatrix}\xrightarrow{\cdot 10}\begin{pmatrix}-24\\39\\10\end{pmatrix}$

Berechnung des Schnittwinkels:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{n}_{E1}\cdot\vec{n}_{E2}}{|\vec{n}_{E1}|\cdot|\vec{n}_{E2}|}$$

$$=\frac{\begin{pmatrix}-5\\9\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-24\\39\\10\end{pmatrix}}{\sqrt{(-5)^2+9^2+1^2}\cdot\sqrt{(-24)^2+39^2+10^2}}$$

$$=\frac{120+351+10}{\sqrt{107}\cdot\sqrt{2197}}$$

$$=\frac{481}{484{,}85}$$

$$=0{,}992 \quad |\arccos\varphi$$

$$\varphi=7{,}22°$$

Aufgabe 4.5.a)

a) Anzahl der unterscheidbaren Nummernschilder mit einem Buchstaben: 26
Anzahl der unterscheidbaren Nummernschilder mit zwei Buchstaben: $26^2 = 676$
Das ergibt $26 + 676 = 702$ unterscheidbare Schilder.

b) Bis zu drei Ziffern bedeutet die Zahlen von 1 bis 999, d. h. 999 unterscheidbare Nummernschilder.

c) Da Buchstaben und Zahlen kombiniert werden, ist die Gesamtzahl der unterscheidbaren Nummernschilder:
$n = 702 \cdot 999 = 701298$

Aufgabe 4.5.b)

Gesetz der großen Zahlen mit <u>bekanntem</u> p. Formel: $P\left(\left|\overline{X} - p\right| < c\right) \geq 1 - \frac{p \cdot q}{n \cdot c^2}$

$$\text{es gilt:} \quad p = \frac{1}{6} \quad ; \quad n = 100 \quad ; \quad c = 20\% = \frac{1}{5}$$

$$P\left(\left|h - \frac{1}{6}\right| < \frac{1}{5}\right) \geq 1 - \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}{100 \cdot \frac{1}{25}} = 1 - \frac{5}{36} \cdot \frac{25}{100} = 1 - \frac{125}{3600} = 0{,}965$$

In mindestens 96,5% aller Wiederholungen des Experimentes weicht die relative Häufigkeit für die Augenzahl „6“ um weniger als 20% von der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ für die Augenzahl „6“ ab.

Aufgabe 4.5.c)

Gesetz der großen Zahlen mit <u>unbekanntem</u> p. Formel: $P\left(\left|\overline{X} - p\right| < c\right) \geq 1 - \frac{1}{4 \cdot n \cdot c^2}$

$$\text{es gilt:} \quad c = 20\% = \frac{1}{5} \quad ; \quad P\left(\left|h - p\right| < \frac{1}{10}\right) \geq 0{,}9$$

$$P\left(\left|h - p\right| < \frac{1}{10}\right) \geq 1 - \frac{1}{4 \cdot n \cdot \frac{1}{100}} = 1 - \frac{100}{4 \cdot n}$$

$$1 - \frac{100}{4 \cdot n} \geq 0{,}9 \quad | -1$$

$$-\frac{100}{4 \cdot n} \geq -0{,}1 \quad | \cdot n : (-0{,}1)$$

$$\frac{100}{4 \cdot 0{,}1} \leq n$$

$$n \geq 250$$

Bei der Division durch eine negative Zahl dreht sich das Ungleichheitszeichen um!

Mindestens 250 Personen müssen befragt werden, um mit 90%iger Sicherheit sagen zu können, daß der ermittelte Prozentsatz vom tatsächlichen Wahlergebnis um höchstens 20% abweicht.